

EJERCICIOS DE ÁLGEBRA

1.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 0 & m & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$.

- a) Calcula los valores de m para los cuales la matriz A no tiene inversa.
 a) Para $m=1$, determine la inversa de A .
 b) Para $m=1$, halle los valores de x , y , z para los que se cumple $A \cdot X = Y$.

2.- Sabiendo que: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, resuelve:

- a) $2X - AX = C - BX$ b) $B \cdot X \cdot B = A^t \cdot C$ d) $X \cdot A + B = 2X$ e) $X \cdot A = X \cdot 2B + C$

3.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Calcula a y b para que se verifique la igualdad $A \cdot B = B \cdot A$.
 b) Calcula los números reales, c y d , para que se verifique la igualdad $A^2 + cA + dI = 0$.
 c) Calcula todas las soluciones del sistema: $(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.- Halla las matrices X e Y que cumplan: $\begin{cases} 2AX + Y = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \\ AX - 2Y = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \end{cases}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

5.- Un alumno emplea en la compra de tres lápices, un sacapuntas y dos gomas tres euros. El coste de la compra dos lápices excede en cinco céntimos de euro al coste de la compra de un sacapuntas y una goma. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una goma de borrar. Determina el precio de un lápiz, un sacapuntas y de una goma.

6.- Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte el 20% del total. Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas. Sabiendo que por cada hoja repartida cobran 3 céntimos, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.

7.- Una fábrica de fertilizantes produce dos tipos de abono, A y B, a partir de dos materias primas M1 y M2. Para fabricar 1 tonelada de A hacen falta 500 kg. de M1 y 750 kg. de M2, mientras que las cantidades de M1 y M2 utilizadas para fabricar 1 tonelada de B son 800 kg. y 400 kg., respectivamente. La empresa tiene contratado un suministro máximo de 10 toneladas de cada materia prima y vende cada tonelada de A al doble que cada tonelada de B. Sabiendo que la demanda de B, a lo sumo, triplica la de A, ¿cuántas toneladas de cada abono debe fabricar para maximizar sus ingresos?

8.- Una empresa fabricante de automóviles produce dos modelos A y B en dos fábricas situadas en Bigastro y Orihuela. La fábrica de Bigastro produce diariamente 6 modelos de A y 4 de B con un coste de 32000€ diarios y la fábrica de Orihuela produce diariamente 4 modelos de A y 4 de B con un coste de 24000€ diarios. El número de días que puede funcionar la fábrica de Orihuela no puede exceder al triple de días que funciona la fábrica de Bigastro. Sabiendo que la fábrica de Bigastro no puede funcionar más de 50 días y que para abastecer el mercado del automóvil se han de poner a la venta al menos 360 modelos del tipo A y 300 modelos del tipo B, determinar el número de días que debe funcionar cada fábrica para minimizar el coste.

9.- Se tienen 2'50€ en monedas de 5 céntimos, de 10 céntimos y de 50 céntimos. El número de monedas de 10 céntimos excede en 2 unidades el número de monedas de 50 céntimos, y por cada moneda de 10 céntimos se tienen dos de 5 céntimos. ¿Cuántas monedas se tienen de cada valor?

10.- Dispongo de 120.000€ para invertir en acciones de la compañía A y acciones de la compañía B. Decido no invertir más de 100.000€ en la compañía B. Las acciones de la compañía A producen unas pérdidas del 10% y las acciones de la compañía B unas ganancias del 10% y queremos obtener unos beneficios de 5.000€, ¿cuánto dinero debo invertir en cada compañía para minimizar el coste, sabiendo que el coste por euro comprado en A es la mitad que en B?

11.- En una fábrica se producen dos tipos de aceite de oliva: aceite de oliva virgen y aceite de oliva virgen extra. La diferencia entre el doble de la producción de aceite de oliva virgen y la producción de aceite de oliva virgen extra no puede superar los 80000 litros. Además, el doble de la producción de aceite de oliva virgen más el triple de la producción de aceite de oliva virgen extra es menor o igual que 240000 litros. Cada litro de aceite de oliva virgen produce un beneficio de 1€, y cada litro de aceite de oliva virgen extra, 1'25€. Sabiendo que se deben producir, por lo menos, 30000 litros de aceite de oliva virgen, ¿cuántos litros de cada tipo de aceite se han de producir para poder obtener un beneficio máximo?

12.- Una fábrica tiene almacenados 1200kg de chocolate y 400 kg de almendras para producir dos tipos de tabletas. Las tipo A llevan 600gr de chocolate y 100gr de almendras y las tipo B llevan 200gr de chocolate y 100gr de almendras. Los beneficios por cada tableta de tipo A son el doble a los beneficios por unidad de B. Sabiendo que el número de tabletas de A es, como mucho, el número de tabletas de B, ¿cuál es la cantidad óptima que debe fabricar de cada tipo para que los ingresos sean máximos?

13.- Un supermercado confecciona dos lotes para vender un máximo de 200 quesos y 100 botellas de vino. El primer lote está compuesto por un queso y una botella de vino por 9€ y el segundo está formado por tres quesos y una botella de vino por 15€. Se venden por lo menos 30 lotes, pero no más de 65 lotes del primer tipo y 60 del segundo tipo. ¿Cuántos lotes de cada tipo se han de vender para obtener unos ingresos máximos?

14.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$,

calcula los valores de a, b y c para que se verifique la ecuación matricial $A \cdot B^t = C$.

15.- Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg. de cobre, 20 kg. de titanio y 14kg. de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo A se necesitan 10 kg. de cobre, 2 de titanio y 1 de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo B se necesitan 15 kg. de cobre, 1 de titanio y 1 de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de cable de tipo A es de 1500€, y por 100 metros de cable de tipo B, 1000€. Calcula los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de la empresa, si además, el número de metros de cable de tipo B es, como mucho, el 50% de los metros de cable de tipo A.

16.- El propietario de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino, por un importe total de 2000€ (sin impuestos), siendo el valor del vino igual al valor conjunto de la cerveza y de los refrescos. Tras añadir los impuestos, la factura asciende a 2340€. Hallar el valor inicial de cada una de las bebidas, sabiendo que los impuestos sobre los refrescos, la cerveza y el vino eran del 10%, el 15% y el 20%.

17.- Sea $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ la matriz del sistema y $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ la de términos independientes.

- a) Escribe las ecuaciones que forman el sistema y halla todas las soluciones del mismo.
b) ¿Cuáles de ellas son de la forma $(x \ 0 \ z)$?

18.- Una empresa piensa invertir hasta 36 millones de euros en una urbanización para construir viviendas de cuatro dormitorios (tipo A), cuyo coste unitario es de 400.000€, y viviendas de dos dormitorios (tipo B) que cuestan cada una 300.000€. La normativa vigente limita el número total de viviendas a 100, de las que, como máximo, 80 pueden ser de dos dormitorios. La empresa obtiene un beneficio de 40.000€ por la venta de cada vivienda de tipo A y de 30.000€ por la venta de cada vivienda de tipo B. Determina cuántas viviendas de cada tipo debe construir para maximizar los beneficios, sabiendo adicionalmente que el número de viviendas de tipo B es, como mucho, el triple del número de viviendas de tipo A.

19.- Una tienda de moda está preparando su pedido de trajes para la próxima temporada. En el pedido no se puede sobrepasar los 20 trajes de fabricación nacional. Además, el número de trajes de fabricación nacional debería ser al menos una tercera parte del número de trajes de importación. Por otro lado, el beneficio que se obtiene por la venta de cada traje de fabricación nacional es 120€ y 200€ por la venta de cada uno de importación. La tienda quiere que el beneficio total que se pueda alcanzar vendiendo todo el pedido sea como mínimo de 3600€. Calcula el número de unidades de cada producto que se han de pedir para minimizar el número total de trajes.

20.- Una empresa fabrica dos productos (P1 y P2) en dos plantas (A y B). La planta A produce diariamente 1000 unidades de P1 y 3000 de P2. La planta B produce diariamente 1000 unidades de cada uno de los dos productos. La empresa se ha comprometido a entregar a sus clientes al menos 60000 unidades de P1 y 160000 de P2. El costo diario de producción es de 100€ en la planta A y 100€ en la planta B. ¿Cuántos días debe trabajar cada una de estas plantas para que se cubran los objetivos comprometidos con el mínimo coste, sabiendo además que el número de días de trabajo de la planta B es, a lo sumo, los días de trabajo de la planta A?

21.- Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y una tercera de sajones. Al asaltar una fortaleza el capitán promete una recompensa de 901 escudos que se repartirán de la siguiente forma: el soldado que primero suba y todos los de su compañía recibirán un escudo, y el resto de la recompensa se repartirá a partes iguales entre el resto de los soldados. Sabiendo que si el primero que sube es un suizo, los de las demás compañías reciben medio escudo cada uno; si el primero es zuavo los restantes reciben un tercio de escudo, y si el primero es sajón los restantes obtienen un cuarto de escudo, ¿cuántos hombres hay en cada compañía?

22.- En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540€ y el precio de cada helado es de 4€ el de vainilla, 5€ el de chocolate y 6€ el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que se ha de comprar el 20% más de helados de chocolate y de nata que de vainilla. ¿Cuántos helados de cada sabor se compran semanalmente?

23.- Los alumnos de un colegio tienen 120 camisetas, 110 pañuelos y 70 gorros. Con el fin de obtener dinero para el viaje de fin de curso, van a ponerlos a la venta en dos paquetes distintos; por el primero (dos camisetas, un pañuelo y un gorro) cobrarán 6€; y por el segundo (una camiseta, dos pañuelos y un gorro) 7€. ¿Cuántos paquetes de cada tipo les convendrá vender para obtener el máximo beneficio?

24.- Vas a contratar un viaje en autobús para 400 personas en una empresa que dispone de 8 autobuses de 40 plazas y de 10 autobuses con 50 plazas cada uno. El alquiler de un autobús pequeño cuesta 600€ y el alquiler de un autobús grande cuesta 800€. Averiguar razonadamente cuántos autobuses de cada clase hay que contratar para minimizar el costo del viaje, sabiendo que la empresa sólo puede disponer de 9 conductores.

25.- La carga máxima que puede transportar un camión es 12 toneladas y tiene que llevar dos materiales A y B a una obra en la que necesitan al menos 6 toneladas del material A y, además, que la cantidad de material B no sea inferior a la mitad de la cantidad de material A. El camión cobra 20€ por cada tonelada de material A y 20€ por cada tonelada de material B. Averiguar cuántas toneladas de material A y cuántas de material B debe transportar para maximizar su ganancia.

26.- En una campaña de promoción se quiere regalar 1000 yogures o más de sabor de limón y fresa a un colegio. Para su fabricación se dispone de 3600 gr. de producto de fermentación; cada yogur de limón necesita 5 gramos de este producto mientras que el de fresa sólo necesita 3 gramos. El coste de un yogur de limón es la mitad del de uno de fresa. Además, no se quiere regalar menos de 150 yogures de limón. ¿Cuántos yogures debemos producir de cada sabor para minimizar el coste?

27.- Una empresa fabrica dos tipos de aparatos A y B, que necesitan pasar por los talleres T1 y T2. En cada uno de los talleres se trabaja 100 horas a la semana. Cada aparato A requiere 3 horas del taller T1 y 2 horas del taller T2, y cada aparato B, 1 y 2 horas, respectivamente. El aparato B se vende un 50% más caro que el A. Obtener razonadamente cuántos aparatos de cada tipo han de producirse para que el ingreso por ventas sea máximo, sabiendo adicionalmente que no se pueden fabricar menos de 10 aparatos de tipo A.